יואב גרוס, 204533632

הפונקציה היוריסטית שבחרתי מבוססת על מרחק מנהטן.

**עבור לוח עם חור יחיד**:

לכל מספר בלוח מחשבים את המרחק מנהטן שלו ממיקום היעד שלו, סוכמים את המרחקים לכל המספרים ומכפילים ב5.

נוכיח שהפונקציה היא consistent, ובכך יוכח גם שהיא admissible.

לפי משפט שהוכח בשיעור, די להוכיח Local consistency. כלומר, עבור לוח , ולוח עוקב כלשהו שלו , נדרש להראות כי

*מכיוון שהעלות האמיתית אינה שלילית, אם הטענה מתקיימת, לכן נוכל להניח כי .*

*בנוסף, כיוון שיש בלוח חור יחיד אז כמו כל לוח עוקב . אך מכיוון ש  
וביניהם בוצעה פעולת הזזה יחידה, לכן קיים מספר (זה שהוזז) שקרוב יותר במשבצת אחת ליעד שלו, את הערך הזה הפונקציה מכפילה ב5. יתר המספרים לא הוזזו. כלומר, במקרה זה .*

**עבור לוח עם שני חורים**:

לכל מספר בלוח מחשבים את מספר ההזזות האופקיות שיש להזיז אותו כדי שיהיה בעמודה של היעד, ומחשבים גם את מספר ההזזות האנכיות כדי להגיע לשורה של היעד.

**מקרי היפוך**: בנוסף, לכל שורה בלוח, בודקים האם ישנם שני מספרים שכבר נמצאים בשורה שלהם (בלוח היעד), אבל בסדר הפוך מזה של היעד. לדוגמה, אם 2 נמצא משמאל ל1, אבל ביעד 1 נמצא משמאלו של 1 באותה השורה. לכל זוג כזה נוסיף עוד 2 הזזות אנכיות לספירה שלנו.

נבדוק באופן דומה לכל עמודה בלוח, ולכל זוג כזה נוסיף עוד 2 הזזות אופקיות לספירה.

**ספירת הזזות בודדות**: כעת, נרצה לזהות כמה שיותר הזזות שהן בוודאות של משבצת בודדת ולא של זוג משבצות.

* נספור את מספר הצעדים המינימלי הנדרש כדי להצמיד את זוג התאים הריקים מהמצב הנוכחי, נסמן ב .
* נוסיף את מספר הצעדים המינימלי הנדרש כדי להצמיד את זוג התאים הריקים ממצב הסיום, נסמן ב .

את כל אלו נזהה כהזזות בודדות. נסווג את הכיוון שלהן כך:

אם התאים הריקים באותה שורה או באותה עמודה, נדרשות הזזות בודדות, אופקיות או אנכיות בהתאמה. מספר ההזזות הוא המרחק בין החורים פחות 1.

אם התאים הריקים אינם באותה שורה וגם אינם באותה עמודה, נספור את הצעדים (בכל כיוון) הנדרשים כדי להצמיד אותם זה לזה, במאוזן או במאונך. כדי להבטיח קונסיסטנטיות, נחשב את המרחק הנדרש כדי להצמיד את התאים הריקים במאונך (כך : ולא כך .. ), משום שמספר ההזזות הנדרש לכך זהה, אך עלות של הזזה אופקית של זוג נמוכה מזו של הזזה אנכית.

לבסוף, נוודא שמספר ההזזות הבודדות בכל כיוון אינו עולה על מספר ההזזות הכולל (אחרת, נקבע את כל ההזזות כבודדות). העלות המשוערת הכוללת היא הכפלת ההזזות הבודדות ב5, ועוד הכפלת ההזזות שייתכן שהן כפולות ב או בהתאם לכיוון, אנכי או אופקי בהתאמה.

להוכחת קונסיסטנטיות, נדרש להראות כי עבור לוחות עוקבים מתקיים

*גם כאן נוכל להניח כי .*

כדי לגרום להפרש להיות מקסימלי (ולהוכיח נכונות גם במקרה זה) נניח כעת שכל מספר שזז התקרב ליעד שלו. בהמשך נטפל גם במקרי היפוך, שם יתכן ומספר התרחק מהיעד שלו, ובכל זאת הגדיל את ההפרש.

**מקרה א**: אם ההבדל בין שני הלוחות הוא הזזה של משבצת בודדת, נניח אנכית אזי .. נניח שאכן ב המשבצת שזזה קרובה יותר אל היעד שלה. ננתח את ההשפעה על ספירת ההזזות הבודדות.

נניח שב נדרשו צעדים כדי להצמיד את התאים הריקים, ב יידרשו לפחות צעדים. נשים לב, שאם ב מרחק מנהטן הכולל היה , ולכן צעדים לכל היותר יהיו בזוגות, ב מרחק מנהטן הכולל הוא , ולכן צעדים יהיו בזוגות גם כן לכל היותר. מכאן, שההבדל בין הלוחות הוא בהזזה בודדת אחת, ואכן

**מקרה ב**: אם ההבדל בין שני הלוחות הוא הזזה של זוג משבצות, נניח אנכית עם , כאמור, ההפרש יהיה מקסימלי אם שני המספרים שזזו התקרב למיקום היעד שלהם.

נשים לב שעבור , מכיוון שהמשבצות צמודות אזי ואין צורך לנתח את ספירת ההזזות הבודדות כי הוא *לא השתנה. לעומת זאת, מספר ההזזות הנדרשות הכולל קטן ב או , תלוי בכיוון הפעולה, לכן*

*בהתאמה לעלות הפעולה.*

*נרצה להצדיק גם מדוע נשמרת הקונסיסטנטיות במקרי היפוך. לשם הפשטות ובלי הגבלת הכלליות נדון בלוח הבא*

|  |  |
| --- | --- |
| *1* | *2* |
| *3* |  |

*כאשר היעד הוא*

|  |  |
| --- | --- |
| *2* | *1* |
| *3* |  |

*כזכור, מלבד מרחק מנהטן אופקי של 2, במקרה היפוך כגון זה הוספנו גם שני צעדים אנכיים.*

*כדי להחליף את סדר המספרים, בהכרח אחד מהם צריך לעלות או לרדת שורה. באופן טיפוסי, לוח ייראה כך (נדון בהמשך על מקרה בו הזזה זו התבצעה על צמד):*

|  |  |
| --- | --- |
| *1* |  |
| *3* | *2* |

*המעבר מ ל ביטל את מקרה ההיפוך, אך הרחיק את המספר 2 בצעד אנכי נוסף ממיקום היעד שלו. נסמן את העלות שהפונקציה מייחסת ליחידת מרחק ב . גם אם הפונקציה היוריסטית מעריכה שמדובר בפעולת הזזה בודדת, עדיין . נחשב את:*

*משום שרק מספר יחיד (2) זז:*

*נשים לב כי המעבר בין הלוחות הגדיל את המרחק של 2 מהיעד ביחידה אחת, מכאן:*

*גם אם ההזזה של 2 נעשתה על ידי הזזה כפולה, והמספר שלצידו התקרב בצעד 1 אל היעד שלו, בה"כ מהלוח הזה*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *1* | *2* | *3* |
| *4* |  |  |

*כאשר היעד הוא*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *2* | *1* |  |
| *4* |  | *3* |

*בוצעה פעולת ההזזה הכפולה ונוצר :*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *1* |  |  |
| *4* | *2* | *3* |

*נסמן באת העלות שהפונקציה נותנת ליחידת מרחק ( או ) ונחשב:*

*נשים לב כי המעבר בין הלוחות הגדיל את המרחק של 2 מהיעד ביחידה אחת, אך הקטין את המרחק של 3 ביחידה אחת גם כן, לכן*

*נזכיר כי קבענו את להיות חצי מעלות פעולת הזזה של זוג, ואכן*